# Guía de Dependencias Funcionales

Prof. Claudio Gutiérrez, Aux. Mauricio Monsalve

Primavera de 2007

## 1. Problemas conceptuales

1. ¿Cuál es la definición formal de una dependencia funcional?
2. ¿Cuáles son los Axiomas de Armstrong?
3. Sea A la llave del esquema R(A,B,C). ¿Qué dependencias funcionales implica la llave?
4. En una relación binaria 1:N (o sea, de cardinalidades (1,1) y (0,n) ó (1,n)), ¿qué dependencia funcional se cumple? ¿Cuál sería la llave de tal tipo de relación?

## 2. Dependencias por definición

1. Sean las dependencias $A \to B$ y $BC \to D$. Pruebe que $AC \to D$ por definición.
2. Sean las dependencias $A \to BC$, $B \to D$, $C \to E$. Pruebe que $A \to DE$ por definición.
3. Sean las dependencias $A \to BC$, $B \to D$, $AC \to E$. Pruebe que $A \to DE$ por definición.
4. Sea el esquema $R(A, B, C)$, el cual tiene sólo una tupla. Encuentre todas sus dependencias funcionales.
5. Pruebe que los Axiomas de Armstrong son correctos usando la definición de las dependencias funcionales.
6. Pruebe que los Axiomas de Armstrong originales[1] son correctos usando la definición. Los axiomas originales son:

   *a*) $A_1A_2...A_n \to A_i, \forall i \in \{1, ..., n\}$
   *b*) $A_1...A_n \to B_1...B_m \Leftrightarrow A_1...A_n \to B_k, \forall k \in \{1, ..., m\}$
   *c*) $A_1...A_n \to B_1...B_m \wedge B_1...B_m \to C_1...C_p \Rightarrow A_1...A_n \to C_1...C_p$

7. Sea $R(A, B, C, D, E)$ y $F = \{A \to BC, C \to D\}$. Pruebe que $AE$ es llave.

[1] W. Armstrong. "Dependency Structures of Data Base Relationships." Proc. IFIP Congress, 1974.

## 3. Axiomas de Armstrong

1. Sean las dependencias $AB \to C,\ CD \to E,\ DE \to F$. Pruebe que $ABD \to F$.

2. Sean las dependencias $A \to BC,\ B \to D,\ C \to E,\ CD \to F,\ EF \to G$. Pruebe que $A \to G$.

3. Sean las dependencias $A \to D,\ B \to AE,\ CF \to B,\ D \to A,\ E \to F,\ F \to D$. Pruebe que $CE \to AB$.

4. Pruebe la equivalencia de los axiomas de Armstrong originales con los usados actualmente ($\Leftarrow$ $y$ $\Rightarrow$). Los axiomas originales son:

   a) $A_1A_2...A_n \to A_i, \forall i \in \{1,...,n\}$
   b) $A_1...A_n \to B_1...B_m \ \Leftrightarrow \ A_1...A_n \to B_k, \forall k \in \{1,...,m\}$
   c) $A_1...A_n \to B_1...B_m \wedge B_1...B_m \to C_1...C \Rightarrow A_1...A_n \to C_1...C$

5. Sea la relación $R(A,B,C,D,E,F,G,H,I)$ y el conjunto de dependencias funcionales asociado $F = \{A \to DE, B \to CF, CE \to HI, G \to BI\}$. Muestre que $AG \to BCI$ usando los axiomas de Armstrong.

## 4. Aplicaciones en el modelo relacional

1. Sea el esquema de relación $R(A,B,C,D)$ y su conjunto de dependencias $F = \{A \to C, BC \to D, D \to B\}$. Indique todas las llaves alternas (minimales) de R.

2. Sea el esquema de relación $R(A,B,C,D)$ y su conjunto de dependencias $F = \{A \to C, D \to C, AC \to B\}$. Encuentre la clausura de F, o sea, F+.

3. Sea el esquema $R(\underline{A,B},C,D,E)$. Se sabe, además, que se cumple $C \to B,\ DE \to A$. Indique todas las llaves alternas.

4. Sea la relación R y los conjuntos de dependencia $F, G : F^+ \subseteq G^+$. Demuestre que toda llave del par $(R,F)$ es superllave del par $(R,G)$.

5. Sea el esquema $R(A,B,C,D,E)$ y $F = \{A \to BC, CD \to E, B \to D, E \to A\}$. Hallar las llaves candidato.

6. Sea el esquema $R(A,B,C)$ y el conjunto de dependencias $F = \{A \to B, C \to AB, B \to BC\}$. Conteste las siguientes preguntas:

   a) ¿Es AB llave minimal?
   b) ¿Cuáles son las llaves candidato?
   c) ¿Cuántas superllaves hay?
   d) ¿Se cumplen $AB \to C$ y $B \to AC$?

7. Sea el esquema de relación $R(A, B, C, D)$ y los siguientes conjuntos de dependencias:

   $F = \{AC \to B, BCD \to AC, B \to C\}$
   $G = \{AB \to D, BD \to A, B \to BC\}$
   $H = \{AB \to D, BD \to A, B \to BC, C \to BC\}$

   Con esto muestre lo siguiente:

   *a*) $G^+ \subset H^+$ (subconjunto estricto)
   *b*) $F^+ \subset H^+$
   *c*) ¿Qué relación hay entre $H$ y $G$?

# 5. Soluciones selectas

**1.1** Dependencia funcional: $A, B \in Esq(R) : (\forall t_1, t_2 \in r, t_1[A] = t_2[A] \Rightarrow t_1[B] = t_2[B]) \Rightarrow A \to B$

**1.3** Básicamente, $A \to BC$ y cualquier dependencia derivada:
$A \to A, A \to B, A \to C, A \to AB, A \to AC, A \to BC, A \to ABC,$
$AB \to A, AB \to B, AB \to C, AB \to AB, AB \to AC, AB \to BC, AB \to ABC,$
$AC \to A, AC \to B, AC \to C, AC \to AB, AC \to AC, AC \to BC, AC \to ABC,$
$ABC \to A, ABC \to B, ABC \to C, ABC \to AB, ABC \to AC, ABC \to BC, ABC \to ABC.$

**2.1** $\forall s, t \in r(R), R(A, B, C, D, ...)$. De las dependencias dadas: $(1) : s[A] = t[A] \Rightarrow s[B] = t[B]$, $(2) : s[BC] = t[BC] \Rightarrow s[D] = t[D]$. Ahora veamos qué ocurre con AC: $(3) : s[AC] = t[AC] \Leftrightarrow s[A] = t[A] \wedge s[C] = t[C]$ (pues dos tuplas son iguales ssi cada par de componentes correspondientes es igual, tal como la igualdad de vectores). Haciendo silogismo de (1) y (3): $s[AC] = t[AC] \Rightarrow s[B] = t[B] \wedge s[C] = t[C]$. Por la definición de equivalencia: $s[AC] = t[AC] \Rightarrow s[BC] = t[BC]$. Usando (2): $s[AC] = t[AC] \Rightarrow s[BC] = t[BC]$. Luego, por definición, $AC \to BC$. $\blacksquare$

**2.4** Toda dependencia funcional $V \to W$ se cumple, con $V, W \subseteq Esq(R)$, $V, W \neq \emptyset$. Como se descarta el conjunto vacío para cada lado, son $(2^3 - 1)^2 = 49$ combinaciones que no se presentarán aquí.

**3.1** $ABD \to AB(trivial),\ y\ AB \to C(dato) \Rightarrow ABD \to C(transitividad).$
$ABD \to C\ y\ ABD \to D(trivial) \Rightarrow ABD \cup ABD \to C \cup D(agrupacion) = ABD \to CD.$
$ABD \to CD\ y\ CD \to E(dato) \Rightarrow ABD \to E(transitividad).$
$ABD \to D(trivial)\ y\ ABD \to E \Rightarrow ABD \to DE(agrupacion).$
$ABD \to DE\ y\ DE \to F(dato) \Rightarrow ABD \to F(transitividad).$ $\blacksquare$

**3.3** $CE \to E(trivial)\ y\ E \to F(dato) \Rightarrow CE \to F(transitividad).\ (\star)$
$CE \to F\ y\ F \to D(dato) \Rightarrow CE \to D(transitividad).$
$CE \to D\ y\ D \to A(dato) \Rightarrow CE \to A(transitividad).\ (\circ)$
$CE \to C(trivial)\ y\ CE \to F(\star) \Rightarrow CE \to CF(agrupacion).$
$CE \to CF\ y\ CF \to B(dato) \Rightarrow CE \to B(transitividad).$
$CE \to B\ y\ CE \to A(\circ) \Rightarrow CE \to AB(agrupacion).$ $\blacksquare$

**4.1** Las llaves son AB y AD.

**4.3** La llave primaria es AB. Otras llaves son AC, BDE, CDE.

**4.6** Respuestas

- **a)** No.
- **b)** A, B y C.
- **c)** Cualquier grupo de atributos de R es superllave. En total hay $2^3 - 1 = 7$ superllaves (se descarta el conjunto vacío).
- **d)** Sí, ambas.